А зачем нам двензор энергии-импульса (ТЭИ)? Ведь у нас уже есть 4-вектор энергии-импульса.

1) 4-вектор энергии импульса относится к точечной частице. А как описать энергию-импульс ***сплошной*** материи? Именно ТЭИ описывает энергию-импульс сплошной материи.

2) До этого у нас были частицы материи. Материя может быть и сплошной. Но, помимо материи, есть и электромагнитное поле – а оно тоже обладает некоей энергией и импульсом (потоком энергии). Мы привыкли, что электромагнитное поле – это всё-таки не материя, какие-то фотоны… А чем они хуже привычных протонов и нейтронов? Вот двензор энергии-импульса и описывает энергию и импульс как обычной материи, так и электромагнитного поля!

Выберем какую-нибудь СК (желательно хорошую, декартовую и инерциальную).

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \boxed{T^{00}} & \boxed{T^{01} \quad T^{02} \quad T^{03}} \\ \boxed{\begin{matrix} T^{10} \\ T^{20} \\ T^{30} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

В ней тензор представится в виде матрицы
Причём, кстати, матрицы симметричной.
Её можно условно разделить на четыре части:

Жёлтая часть: T^{00} – объёмная плотность энергии. Это $\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)$.
Более общая формула, на случай сплошных сред (давайте потихоньку к ним привыкать, ведь они уже скоро, в 6 семестре), $\frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right)$. В вакууме они равны, если положить **D**=**E**/4π, **B**=**H**/4π.
Кажется, тут сложностей быть не может.

Зелёная часть:

T^{01}, T^{02}, T^{03} — *компоненты потока энергии* (вектора Пойнтинга), делённые на *c*. В силу симметрии $T^{\mu\nu}$ соблюдается равенство: $T^{0\mu} = T^{\mu 0}$

Формула для них: $$\begin{pmatrix} T_{01} & T_{02} & T_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{10} & T_{20} & T_{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{c}\left[\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right]$$

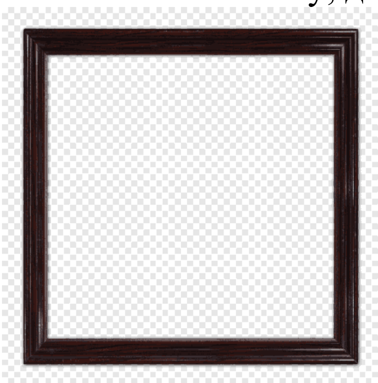
Красная часть: да они же, тензор же симметрический.
Синяя часть. Самое сложное.

- Подматрица 3 x 3 из чисто пространственных компонент

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}$$

есть 3-мерный тензор плотности потока импульса, или тензор напряжений со знаком минус.

Вот тут физсмысл понять совсем сложно, но я сейчас объясню. Что мы представляем при словосоветчании «тензор напряжений»? Скорее всего, какой-то сопромат: например, поролон который мы сжимаем и вдоль, и поперёк, и там возникают продольные и поперечные упругости (диагональные компоненты – это Гуковские коэффициенты жёсткости, или, более научно, модули Юнга вдоль каждого из направлений).

Могут ли быть такие упругости у электромагнитного поля? Ну, давайте себе представим вот такую квадратную рамку: . На неё мы нанесём положительную плотность заряда (возможно, в каждой точке разную, но везде >0). Что произойдёт? Дедушка Кулон скажет «тут есть сила, заряды хотят разорвать рамку» - будто бы внутри рамки есть некие «пружинки», только в роли пружинок электромагнитное поле.

Ну и вот вам вормула:

$$T_{ij} = E_i D_j + B_i H_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) = E_i D_j + B_i H_j - \delta_{ij} T_{00}.$$

Где W – плотность энергии.

Подытожим красивой табличкой:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}$$

	Что там	Формула
Жёлтая часть	Объёмная плотность энергии	$\frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})$
Зелёная часть	Поток импульса, он же вектор Пойтинга	$\frac{1}{c}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]$
Красная часть	Поток импульса, он же вектор Пойтинга	$\frac{1}{c}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]$
Синяя часть	Двензор 3x3 напряжений Максвелла	$T_{ij}=E_iD_j+B_iH_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})=E_iD_j+B_iH_j-\delta_{ij}T_{00}.$

Опять же, можно возникнуть ощущение, что мы «неэкономны»: используем 16 компонент (ещё 9 из них заняты каким-то стрёмным двензором 3x3), а у нас нет столько информации, не нужно нам столько. Ответ тот же, что и с двензором электромагнитного поля: теорфизикам плевать на экономность, им главное – тензорность ☺

Разумеется, этот двензор подчиняется ровно таким же формулам при переходе в другую СК, что и двензор э/м поля.

В принципе для зачёта по электроду этого достаточно, но давайте для любителей решатель бесполезные задачи решим задачу 18.1: показать, что для плоской монохроматической волны с частотой ω двензор энергии-импульса может быть записан в виде
$T^{mn}=wc^2/\omega^2*k^m*k^n$, где k^i – i-тая компонента 4-волнового вектора ω/c, **k**}.

Давайте схалтурим и направим ось x вдоль распространения волны.
Тогда волновой вектор k примет вид {ω/c, k, 0, 0}.

$$\text{Тогда } wc^2/\omega^2*\begin{pmatrix}\omega^2/c^2 & \omega/c*k & 0 & 0\\ \omega/c*k & k^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

– вот так будет выглядеть матрица в правой части.

Т.к. ω/c=k, её можно упростить. Получим

$$w\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Теперь подсчитаем левую часть.
То, что T[0][0] равно w, доказывается просто по определению.

С тремя красными компонентами нужно воспользоваться формулой

$$\begin{pmatrix} T_{01} & T_{02} & T_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{10} & T_{20} & T_{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{c}\left[\mathbf{E} \times \mathbf{H}\right]$$, где

E={0, A*cos(ωt-kx), 0}

H={0, 0, A*cos(ωt-kx)}

У векторного производения будет только иксовая компонента и она будет раз как плотность энергии.

То же самое рассуждение применим для зелёной части.

Итак, мы доказали, что матрица имеет вид

w(1 1 0 0
1 ? ? ?
0 ? ? ?
0 ? ? ?).

Считаем самую сложную часть, синюю – матрицу снизу 3x3:

E={0, A*cos(ωt-kx), 0}

H={0, 0, A*cos(ωt-kx)}

A – амплитуда волны,

D=**E**/4π, **B**=**H**/4π.

$T_{ij}=E_iD_j+B_iH_j-1/2*б_{ij}(\mathbf{ED}+\mathbf{BH})=1/4\pi*(E_iE_j+H_iH_j-1/2*б_{ij}(\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2)$.

Рассмотрим 2 случая.

1) i не равно j. Тогда, какие бы не были бы i и j, $E_iE_j=0$, $H_iH_j=0$, $б_{ij}=0$.

2) i=j. Тогда формула будет $T_{ii}=1/4\pi*(E_iE_i+H_iH_i-1/2(\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2)=1/4\pi*(б_{2i}A^2\cos^2-б_{3i}A^2\cos^2-1/2(A^2+A^2)\cos^2)$ $=A^2*\cos^2()/4\pi*(б_{2i}-б_{3i}-1)$.

Если i=2 или 3, то это всё равно 0. И лишь при i=1 получим не 0, а $-A^2*\cos^2()/4\pi$. Вспоминая, что $w(t)=E(t)^2+H(t)^2/8\pi$ и усредняя по периоду, получим как раз w для T[1][1]. А для остальных будет ноль, да-да. Ч.т.д.